

**2-лекция. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод итерации.**

Цель лекции — изучить методы решения систем линейных алгебраических уравнений, освоить итерационные методы (например, метод простых итераций), понять условия сходимости итерационных процессов и научиться применять их для нахождения приближённых решений систем.

План лекции:

1. Итерационные методы решения: метод Якоби.
2. Условия сходимости итераций.
3. Практическое применение: пример решения и анализ точности.
4. Заключение: преимущества и ограничения итерационных методов.
5. Контрольные вопросы

1 Метод итерации

Рассмотрим следующую *систему линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). Для простоты рассуждений рассмотрим систему с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \quad (1.1)$$

где x_1, x_2, x_3 — неизвестные переменные, a_{ij} — коэффициенты при переменных в уравнениях ($i = 1, 2, 3$ номер уравнения, $j = 1, 2, 3$ номер переменной), b_1, b_2, b_3 — свободные члены (правая часть уравнений).

Если мы запишем систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде, то имеем

$$Ax = b, \quad (1.2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Предполагаем, что диагональные коэффициенты

$$a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.4)$$

1. Разрешая первое уравнение системы (1.1) относительно x_1 , получаем

$$x_1 = \underbrace{\frac{b_1}{a_{11}}}_{\beta_1} - \underbrace{\frac{a_{12}}{a_{11}}}_{\alpha_{12}} x_2 - \underbrace{\frac{a_{13}}{a_{11}}}_{\alpha_{13}} x_3. \quad (1.5)$$

Следовательно,

$$x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3. \quad (1.6)$$

2. Разрешая второе уравнение системы (1.1) относительно x_2 , получаем

$$x_2 = \underbrace{\frac{b_2}{a_{22}}}_{\beta_2} - \underbrace{\frac{a_{21}}{a_{22}}}_{\alpha_{21}} x_1 - \underbrace{\frac{a_{23}}{a_{22}}}_{\alpha_{23}} x_3. \quad (1.7)$$

Следовательно,

$$x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3. \quad (1.8)$$

3. Разрешая третье уравнение системы (1.1) относительно x_3 , получаем

$$x_3 = \underbrace{\frac{b_3}{a_{33}}}_{\beta_3} - \underbrace{\frac{a_{31}}{a_{33}}}_{\alpha_{31}} x_1 - \underbrace{\frac{a_{32}}{a_{33}}}_{\alpha_{32}} x_2. \quad (1.9)$$

Следовательно,

$$x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2. \quad (1.10)$$

Используя формулы (1.6), (1.8) и (1.10), получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3, \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Введем следующие матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Здесь элементы $\alpha_{jj} = 0$, $j = 1, 2, 3$. Систему (1.11) можем записать в матричной форме

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha \mathbf{x}. \quad (1.13)$$

Систему (1.13) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем, например, столбец свободных членов:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

где $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$ – нулевое приближение. Далее, последовательно строим матрицы-столбцы

$$\mathbf{x}^{(1)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(0)} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

где $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$ – первое приближение. Отсюда имеем

$$\mathbf{x}^{(2)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(1)} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$ – второе приближение. Вообще говоря, любое $(k+1)$ -е приближение вычисляют по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(k)} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.17)$$

Если последовательность приближений $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел

$$\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

то этот предел является решением системы (1.13). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (1.17), будем иметь:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

или

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha \mathbf{x},$$

т. е. предельный вектор \mathbf{x} является решением системы (1.13), а следовательно, и системы (1.1).

2 Пример

Решить систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \quad (2.1)$$

методом итерации.

Решение. Здесь диагональные коэффициенты 4, 3, 4 системы значительно преобладают над остальными коэффициентами. Приведём эту систему к нормальному виду (1.11):

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

В матричной форме систему (2.2) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

За нулевые приближения корней системы (2.1) принимаем:

$$x_1^{(0)} = 2, \quad x_2^{(0)} = 3, \quad x_3^{(0)} = 5.$$

Подставляя эти значения в правые части уравнений (2.2), получим первые приближения корней:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0,06 \cdot 3 + 0,02 \cdot 5 = 1,92, \quad x_2^{(1)} = 3 - 0,03 \cdot 2 + 0,05 \cdot 5 = 3,19, \quad x_3^{(1)} = 5 - 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 5,04.$$

Далее, подставляя эти найденные приближения в формулу (2.2), получим вторые приближения корней:

$$x_1^{(2)} = 1,9094, \quad x_2^{(2)} = 3,1944, \quad x_3^{(2)} = 5,0446.$$

После новой подстановки будем иметь третьи приближения:

$$x_1^{(3)} = 1,90923, \quad x_2^{(3)} = 3,19495, \quad x_3^{(3)} = 5,04485, \dots$$

Результаты вычислений можно оформить в таблице:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

3 Метод Зейделя

Систему (1.13) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем, например, столбец свободных членов:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$ — нулевое приближение. При подстановке полученного нулевого приближения (1.11) в систему получаем выражение следующего вида

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \alpha_{13}x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{23}x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} \end{cases}. \quad (3.2)$$

где $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$ – первое приближение. Отсюда имеем

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(1)} + \alpha_{13}x_3^{(1)}, \\ x_2^{(2)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{23}x_3^{(1)}, \\ x_3^{(2)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} \end{cases}, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$ – второе приближение. В общем случае $(k+1)$ -е приближение вычисляется по формуле

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k)}, \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(k)} + \alpha_{32}x_2^{(k)} \end{cases}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Если последовательность приближений $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел

$$\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

то этот предел является решением системы (1.13). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (3.4), будем иметь:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

или

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha \mathbf{x},$$

т. е. предельный вектор \mathbf{x} является решением системы (1.13), а следовательно, и системы (1.1).

4 Пример

Методом Зейделя решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение. Приведём эту систему к виду, удобному для итерации:

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases}$$

В качестве нулевых приближений корней возьмём:

$$x_1^{(0)} = 1.2, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0.$$

Применяя процесс Зейделя, последовательно получим:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1 \cdot 0 - 0.1 \cdot 0 = 1.2, \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.1 \cdot 0 = 1.06, \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.2 \cdot 1.06 = 0.948, \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \cdot 1.06 - 0.1 \cdot 0.948 = 0.9992, \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.1 \cdot 0.948 = 1.00536, \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.2 \cdot 1.00536 = 0.999088, \end{cases} \quad (\text{II})$$

и т. д.

Результаты вычислений с точностью до четырёх знаков помещены в таблице.

Таблица 1: Нахождение корней линейной системы методом Зейделя

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2000	0.0000	0.0000
1	1.2000	1.0600	0.9480
2	0.9992	1.0054	0.9991
3	0.9996	1.0001	1.0001
4	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000

Точные значения корней:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

5 Преимущества и недостатки метода итерации Якоби

- Простота реализации: формула метода Якоби очень проста и легко программируется.
- Параллельность вычислений: новые значения переменных на каждой итерации вычисляются независимо друг от друга.
- Не требует разложения матрицы: работает без полного разложения матрицы, что экономит память для больших систем.
- Эффективен для разреженных систем: сохраняет структуру разреженной матрицы и не создаёт дополнительных заполнений.
- Лёгкий контроль сходимости: можно оценить сходимость с помощью норм матрицы или диагонального преобладания.
- Медленная сходимость: метод может сходиться медленно, особенно для плохо обусловленных систем.
- Требуется диагонального преобладания: для гарантии сходимости матрица должна удовлетворять определённым условиям.
- Не всегда эффективен для плотных матриц: при плотных системах прямые методы могут быть быстрее.

6 Контрольные вопросы

1. Что такое метод Якоби для решения систем линейных алгебраических уравнений?
2. Как записывается итерационная формула метода Якоби для системы $Ax = b$?
3. В чем заключается принцип разложения матрицы A на диагональную и недиагональную части в методе Якоби?
4. Какие условия обеспечивают сходимость метода Якоби?
5. Как можно проверить, что итерационный процесс метода Якоби сошелся к точному решению?
6. В чем различие между методом Якоби и методом Гаусса–Зейделя?

7. Как влияет размер диагональных элементов матрицы A на скорость сходимости метода Якоби?

8. Решите систему методом Якоби

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1,235 \\ 1,089 \\ 0,560 \end{pmatrix}$$

9. Решите систему методом Зейделя

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15. \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

Список литературы

- [1] Копченова Н. В., Марон И. А. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. — СПб.: Издательство «Лань», 2019. — 368 с. [7](#)
- [2] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы: Учебное пособие для вузов*.—М.: Наука, 1989.—432 с. [7](#)
- [3] Киреев В. И., Пантелеев А. В. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие*. —СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 448 с. [7](#)
- [4] Jaan Kiusalaas. *Numerical methods in engineering with Python*. Cambridge University Press. 2013 [7](#)
- [5] Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики: учебное пособие*. — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 672 с. [7](#)
- [6] Шакинов Қ.Қ. *Есептеу математикасы әдістері лекциялар курсы*. Алматы, 2019. — 193 б. [7](#)

[7] Сұлтанғазин Ө.М., Атанбаев С. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. - Алматы: Білім, - 2016.
– 286 б. 7

[8] В. П. Демидович, Е. Б. Марон, *Основы вычислительной математики*, М.: Наука, 1970. 7